SESSION DE 2005

concours externe de recrutement de professeurs agrégés

section : mathématiques

composition d'analyse et probabilités

durée : 6 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la circulaire 99-186 du 16 novembre 1999.

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

Notations

- Soient I un ensemble non vide et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels *positifs*. On appelle *somme* de cette famille et l'on note $\sum_{i\in I} a_i$ la borne supérieure dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des sommes $\sum_{i\in J} a_i$ lorsque J décrit les parties finies de I.
- On pose $(+\infty)^{1/2} = +\infty$.
- Notons $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ l'espace vectoriel complexe des familles $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ de nombres complexes.
- Le *support* d'un élément $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ est le sous-ensemble $\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2 \mid a_{m,n}\neq 0\}$ de $\mathbb{Z}^2$.
- On note $\mathcal{A}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ formé des familles de support fini.
- Pour $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$, on note $W_{m,n}\in\mathcal{A}$ la famille $(a_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ telle que $a_{m,n}=1$ et $a_{p,q}=0$ si $(p,q)\neq(m,n)$.
- Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on pose

$$\|\mathbf{a}\|_1 = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}| \qquad \text{et} \qquad \|\mathbf{a}\|_2 = \left(\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} |a_{m,n}|^2\right)^{1/2}.$$

- On pose $A_1 = \{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_1 \neq +\infty\}$ et $A_2 = \{\mathbf{a} \mid \|\mathbf{a}\|_2 \neq +\infty\}$.
- Dans tout le problème on fixe un nombre complexe λ de module 1.

Les parties I.B, II et III sont indépendantes

I. Algèbres de convolution « tordue »

A. La convolution tordue

1. (a) Montrer que l'on a $\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|^2 \leqslant \Big(\sum_{(m,n)\in J} |a_{m,n}|\Big)^2$ pour tout $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ et toute partie finie J de $\mathbb{Z}^2$.

   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a}\in\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on a $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$. En déduire que $A_1 \subset A_2$.

   > Les ensembles A_1 et A_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$. On munit dorénavant A_1 de la norme $\| \ \|_1$ et A_2 de la norme $\| \ \|_2$. Alors A_1 est un espace de Banach et A_2 est un espace de Hilbert. De plus, $\mathcal{A}$ est dense dans l'espace de Banach A_1 et dans l'espace de Hilbert A_2. *On ne demande pas de justifier ces faits.*

2. Montrer qu'il existe une unique forme linéaire continue $\sigma : A_1 \to \mathbb{C}$ telle que $\sigma(W_{m,n}) = 1$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$.

   Si $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1, on note $\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} a_{m,n}$ le nombre $\sigma(\mathbf{a})$.

3. Soient $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ et $\mathbf{b} = (b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ des éléments de A_2.

(a) Soient $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$. Montrer que la famille $\left(\lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2}$ est un élément de A_1.

(b) On pose $c_{m,n} = \sum_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2} \lambda^{q(m-p)} a_{p,q} b_{m-p,n-q}$.

Montrer que $|c_{m,n}| \leqslant \|\mathbf{a}\|_2 \|\mathbf{b}\|_2$ et que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $A \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2$, on ait $|m|+|n| \geqslant A \Rightarrow |c_{m,n}| \leqslant \varepsilon$ (étudier d'abord le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$ et $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$).

> On pose $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = (c_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$.
> Si m, m', n, n' sont des entiers relatifs, on a $W_{m,n} \star W_{m',n'} = \lambda^{nm'} W_{m+m',n+n'}$; pour tout $\mathbf{a} \in A_2$, on a $W_{0,0} \star \mathbf{a} = \mathbf{a} \star W_{0,0} = \mathbf{a}$. *On ne demande pas de justifier ces faits.*

(c) Montrer que, pour $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_1$ on a $\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1$.

(d) Montrer que le « produit » $\star$ est associatif sur A_1.

> Dans la suite du problème, on pose $\mathbf{1} = W_{0,0}$, $U = W_{1,0}$ et $V = W_{0,1}$. Pour $\mathbf{a} \in A_1$, on définit $\mathbf{a}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, en posant $\mathbf{a}^0 = \mathbf{1}$, et $\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}^n \star \mathbf{a}$. S'il existe un élément $\mathbf{b} \in A_1$ (nécessairement unique) tel que $\mathbf{a} \star \mathbf{b} = \mathbf{b} \star \mathbf{a} = \mathbf{1}$, on dira que $\mathbf{a}$ est *inversible* et on posera $\mathbf{b} = \mathbf{a}^{-1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose alors $\mathbf{a}^{-n} = (\mathbf{a}^{-1})^n = (\mathbf{a}^n)^{-1}$.
> On remarque que $V \star U = \lambda(U \star V)$ et que, pour tout $m, n \in \mathbb{Z}$, on a $W_{m,n} = U^m \star V^n$.

B. Fonctions périodiques de classe C^1.

On note B l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^1 périodiques de période 1, muni de la norme $N : f \mapsto \sup\{|f(t)| + |f'(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}$. On note $z \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi t}$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $z^n \in B$ l'application $t \mapsto e^{2i\pi nt}$.

1. (a) Montrer que pour tout $f, g \in B$, on a $N(fg) \leqslant N(f)N(g)$, où l'on a noté fg la fonction $t \mapsto f(t)g(t)$.

   (b) Montrer que le sous-espace de B engendré par la famille $(z^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est dense dans B.

2. (a) Montrer que, pour tout $f \in B$, la famille $\psi(f)$ définie par

$$\psi(f)_{m,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 0 \\ \displaystyle\int_0^1 f(t) e^{-2i\pi mt} \,\mathrm{d}\, t & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

   est un élément de A_1. Montrer que l'application $\psi : B \to A_1$ ainsi définie est continue et vérifie $\psi(fg) = \psi(f) \star \psi(g)$ pour tout $f, g \in B$.

   Remarquons que l'on a $\psi(z) = U$.

   (b) Soit θ un nombre réel tel que $e^{2i\pi\theta} = \lambda$. Montrer que pour tout $f \in B$ on a l'égalité $V \star \psi(f) = \psi(g) \star V$ où g est la fonction $t \mapsto f(t+\theta)$.

II. Un calcul d'image et de noyau

A. Approximation des réels par des rationnels

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\delta(x) = \inf\{|x-n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Soient $s_0, \ldots, s_{n+1} \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n+1$ et $|s_i - s_j| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
   (b) Soient $t_0, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des nombres entiers i et j satisfaisant $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et $\delta(t_i - t_j) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
   (c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{N}$ satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\delta(kt) \leqslant \dfrac{1}{n+1}\cdot$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Pour $q \in \mathbb{N}^*$, posons $U_\alpha(q) = \{t \in \mathbb{R} \mid \delta(qt) < q^{-\alpha}\}$ et notons $Y_\alpha = \limsup\limits_{q\to\infty} U_\alpha(q)$ l'ensemble des t qui appartiennent à une infinité de $U_\alpha(q)$.
   (a) Montrer que $Y_1 = \mathbb{R}$.
   (b) Calculer la mesure de Lebesgue de $U_\alpha(q) \cap [0,1]$.
   (c) Montrer que pour $\alpha > 1$, l'ensemble Y_α est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En déduire que $Y = \bigcup\limits_{\alpha>1} Y_\alpha$ est de mesure nulle (pour la mesure de Lebesgue).
3. (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'ensemble Y_α est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble $X = \bigcap\limits_{\alpha\in\mathbb{R}_+^*} Y_\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$ et que c'est une intersection dénombrable d'ouverts de $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $t \notin X$ si et seulement s'il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $P(n)\delta(nt) \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

B. Un calcul d'image et de noyau

Pour $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on pose $\tau(\mathbf{a}) = a_{0,0}$.

Pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A_2$, on a $\tau(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = \tau(\mathbf{b} \star \mathbf{a})$. *On ne demande pas la vérification de cette formule.*

Considérons les applications $S : x \mapsto U \star x \star U^{-1} - x$ et $T : x \mapsto V \star x \star V^{-1} - x$ de A_1 dans lui même. Notons $L : A_1 \to A_1 \times A_1$ et $M : A_1 \times A_1 \to A_1$ les applications linéaires définies par $L(x) = (S(x), T(x))$ et $M(x,y) = S(y) - T(x)$ (pour $x, y \in A_1$).

1. Montrer que $\mathrm{Im}L \subset \mathrm{Ker}M$.
   On suppose jusqu'à la fin du II que λ n'est pas une racine de 1. On écrira $\lambda = e^{2i\pi\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Quel est le noyau de L ?
3. Montrer que l'adhérence de $\mathrm{Im}M$ est $\mathrm{Ker}\tau$. On munit l'espace vectoriel $A_1 \times A_1$ de la norme $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \|\mathbf{a}\|_1 + \|\mathbf{b}\|_1$. Quelle est l'adhérence de $\mathrm{Im}L$?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\inf\{\|T(U^k)\|_1 \mid 1 \leqslant k \leqslant n\} \leqslant 2\sin\dfrac{\pi}{n+1}\cdot$
   En déduire que l'image de L n'est pas fermée.
5. On note $\mathcal{E} \subset A_1$ le sous-espace vectoriel formé des $\mathbf{a} = (a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2} \in A_1$ tels que $a_{0,0} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(m,n) \mapsto (1+m^2+n^2)^k a_{m,n}$ appartienne à A_1. Les applications L et M induisent des applications linéaires $L' : \mathcal{E} \to \mathcal{E}\times\mathcal{E}$ et $M' : \mathcal{E}\times\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. A quelle condition sur θ a-t-on $\mathrm{Im}L' = \mathrm{Ker}M'$ et $\mathrm{Im}M' = \mathcal{E}$?

III. Calcul de normes - stabilité par l'inverse

- Soit (E,N) un espace vectoriel (complexe) normé. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel normé des applications linéaires continues de E dans lui-même. Rappelons que la norme d'un élément $T \in \mathcal{L}(E)$ est le nombre réel positif $|||T||| = \sup\{N(T(x)) \mid x \in E,\ N(x) \leqslant 1\}$.
- Soit E un espace de Hilbert (complexe). Notons $\langle\ |\ \rangle$ son produit scalaire. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$; il existe un unique élément $T^* \in \mathcal{L}(E)$ appelé *adjoint* de T tel que pour tout $x, y \in E$ on ait $\langle T(x)|y\rangle = \langle x|T^*(y)\rangle$. On a $|||T^*||| = |||T|||$. *On ne demande pas de justifier ces faits.*
  On dit que T est *unitaire* si T est bijectif et $T^{-1} = T^*$.

A. La représentation régulière.

1. Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ et tout $\mathbf{b} \in A_2$, on a $\|\mathbf{a}\star\mathbf{b}\|_2 \leqslant \|\mathbf{a}\|_1\|\mathbf{b}\|_2$.

> A l'aide de 1., on définit une application linéaire continue $\pi : A_1 \to \mathcal{L}(A_2)$ satisfaisant $\pi(\mathbf{a})(x) = \mathbf{a}\star x$ et $|||\pi(\mathbf{a})||| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$ pour $\mathbf{a} \in A_1$ et $x \in A_2$.

2. Montrer que $\pi(\mathbf{a}\star\mathbf{b}) = \pi(\mathbf{a})\circ\pi(\mathbf{b})$. Montrer que $\pi(U)$ et $\pi(V)$ sont unitaires.
3. Montrer que $\|\mathbf{a}\|_2 \leqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$ pour tout $\mathbf{a} \in A_1$.

> Pour $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$, on note $\mathbf{a}^* \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^2}$ la famille $(b_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2}$ définie par :
>
> $$b_{m,n} = \lambda^{mn}\,\overline{a_{-m,-n}}\,.$$
>
> Pour tout $\mathbf{a} \in A_1$ l'adjoint $\pi(\mathbf{a})^*$ de $\pi(\mathbf{a})$ est $\pi(\mathbf{a}^*)$. *On ne demande pas de justifier cette formule.*

B. Un calcul de norme

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $T \in \mathcal{L}(H)$. Rappelons que la suite $n \mapsto |||T^n|||^{1/n}$ est convergente. *On ne demande pas de justifier ce fait.*
   Montrer que $|||T^*\circ T||| = |||T|||^2$. En déduire que $|||T||| = \lim\limits_{n\to\infty} |||(T^*\circ T)^n)|||^{1/2n}$.
2. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note k_n le nombre d'éléments du support de $\mathbf{a}^n$.
   (a) Montrer que $\|\mathbf{a}^n\|_1 \leqslant \|\mathbf{a}^n\|_2\sqrt{k_n}$.
   (b) Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $k_n \leqslant r^2 n^2$.
   (c) Montrer que l'on a $\lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{a}^n\|_2^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}|||\pi(\mathbf{a}^n)|||^{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\|\mathbf{a}^n\|_1^{1/n}$.
   (d) Montrer que $|||\pi(\mathbf{a})||| = \lim\limits_{n\to\infty}\left\|(\mathbf{a}^*\star\mathbf{a})^n\right\|_1^{1/2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\Big(\tau((\mathbf{a}^*\star\mathbf{a})^{2n})\Big)^{1/4n}$.

C. Deux applications

1. Soient H un espace hilbertien complexe et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique homomorphisme continu $\sigma_{u,v} : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ d'algèbres (*i.e.* une application continue qui soit à la fois linéaire et un homomorphisme d'anneaux) satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$, $\sigma_{u,v}(V) = v$. Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \leqslant \|\mathbf{a}\|_1$.
   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| \leqslant |||\pi(\mathbf{a})|||$.
2. On note A l'adhérence de $\pi(A_1)$ dans $\mathcal{L}(A_2)$. Soit $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$. On suppose que $\pi(\mathbf{a})$ est inversible dans A.
   (a) Montrer qu'il existe $\mathbf{b} \in \mathcal{A}$ tel que $|||\pi(\mathbf{1} - \mathbf{a} \star \mathbf{b})||| < 1$ et $|||\pi(\mathbf{1} - \mathbf{b} \star \mathbf{a})||| < 1$.
   (b) Montrer que $\mathbf{a}$ est inversible dans A_1.

D. Idéaux bilatères et représentations

On suppose que λ n'est pas une racine de 1.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbf{a} \in A_1$ on pose $\tau_n(\mathbf{a}) = n^{-2} \displaystyle\sum_{0 \leqslant j,k < n} U^j \star V^k \star \mathbf{a} \star V^{-k} \star U^{-j}$.
   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, la suite $\tau_n(\mathbf{a})$ converge dans A_1 vers $\tau(\mathbf{a})\mathbf{1}$ (on pourra commencer par traiter le cas où $\mathbf{a} \in \mathcal{A}$).
   (b) Soit $\mathbf{a} \in A_1$ non nul. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\tau_n(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})$ soit inversible dans A_1.
2. Montrer que tout idéal bilatère non nul de A_1 est égal à A_1.
3. Soient H un espace hilbertien complexe non nul et $u, v \in \mathcal{L}(H)$ des endomorphismes unitaires tels que $vu = \lambda uv$. On note $\sigma_{u,v} : A_1 \to \mathcal{L}(H)$ l'homomorphisme continu d'algèbres satisfaisant $\sigma_{u,v}(U) = u$ et $\sigma_{u,v}(V) = v$.
   (a) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|\tau(a)| \leqslant |||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})|||$.
   (b) Montrer que, pour tout $\mathbf{a} \in A_1$, on a $|||\sigma_{u,v}(\mathbf{a})||| = |||\pi(\mathbf{a})|||$.

IV. Une égalité de norme

Considérons les espaces hilbertiens suivants :

- $H_{\mathbb{R}}$ désigne l'espace $L^2(\mathbb{R})$ des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables et de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\xi(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t \right)^{1/2}$.
- $H_{\mathbb{U}}$ désigne l'espace des classes de fonctions $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mesurables périodiques de période 1 telles que $\displaystyle\int_0^1 |\xi(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t < +\infty$ (modulo les fonctions négligeables), muni de la norme $\xi \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 |\xi(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t \right)^{1/2}$.

- $H_{\mathbb{Z}}$ désigne l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ des fonctions $\xi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi(n)|^2 < +\infty$, muni de la norme $\xi \mapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\xi(n)|^2\right)^{1/2}$.

On ne demande pas de vérifier que ce sont des espaces hilbertiens.

Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Donnons-nous des fonctions $(f_k)_{-N\leqslant k\leqslant N}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, périodiques de période 1.

Considérons les opérateurs $T_{\mathbb{R}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{R}})$ et $T_{\mathbb{U}} \in \mathcal{L}(H_{\mathbb{U}})$ définis de la manière suivante : si $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* $\tilde{\xi} \in H_{\mathbb{U}}$) est la classe d'une fonction mesurable $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, on note $T_{\mathbb{R}}\tilde{\xi}$ (*resp.* $T_{\mathbb{U}}\tilde{\xi}$) la classe dans $H_{\mathbb{R}}$ (*resp.* dans $H_{\mathbb{U}}$) de la fonction $t \mapsto \sum_{k=-N}^{N} f_k(t)\xi(t+k\theta)$.

Si $\xi \in H_{\mathbb{Z}}$, on pose $T_{\mathbb{Z}}\xi(n) = \sum_{k=-N}^{N} f_k\left(\frac{n}{\theta}\right)\xi(n+k)$.

Montrer que $|||T_{\mathbb{R}}||| = |||T_{\mathbb{U}}||| = |||T_{\mathbb{Z}}|||$.
